ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN THẮNG

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ DIỆN TÍCH TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN THẮNG

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ DIỆN TÍCH TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của TS. Ngô Văn Định (Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán–Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả muốn gửi những lời cảm ơn tốt đẹp nhất tới tập thể lớp Cao học Toán khóa 9B (2015-2017) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong suốt quá trình học tập.

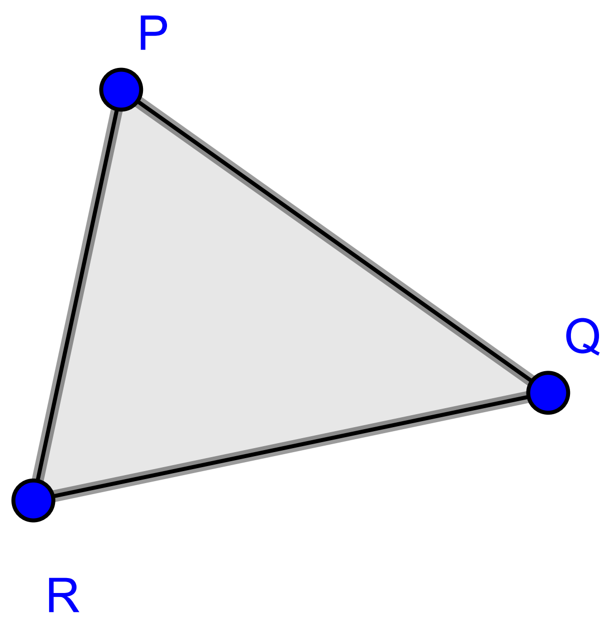
Cuối cùng, tác giả xin gửi những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến gia đình vì những động viên và chia sẻ để tác giả hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, 2017

Phạm Văn Thắng

Kí hiệu và quy ước

Trong luận văn này, ta luôn kí hiệu ΔABC là một tam giác trong mặt phẳng với các đỉnh theo thứ tự có chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Độ dài các cạnh được kí hiệu bởi $a = BC, b = CA, c = AB$. Ngoài ra, với ba điểm P, Q, R bất kỳ trong mặt phẳng ta kí hiệu $[PQR]$ là diện tích có hướng của tam giác ΔPQR với dấu được quy ước là dấu âm khi và chỉ khi thứ tự các đỉnh theo chiều âm (cùng chiều kim đồng hồ). Hình 1 là ví dụ về diện tích có hướng của tam giác.



Hình 1: $[PQR] < 0, [PRQ] > 0$

Mở đầu

Trong hình học phẳng, bên cạnh các hệ tọa độ quen thuộc như hệ tọa độ Descartes, tọa độ cực, tọa độ Affine của hình học xạ ảnh, hình học hiện đại còn có một lý thuyết rất thú vị thể hiện mối quan hệ mật thiết giữa hình học và đại số mà ở đó, tọa độ các điểm xác định nhờ một hình tam giác cơ sở thông qua các đại lượng vectơ, đó chính là *tọa độ diện tích* (areal coordinate) hay còn gọi là *tọa độ tỉ cự* (barycentric coordinate). Cụ thể hơn, với một tam giác cơ sở ΔABC trong mặt phẳng, tọa độ diện tích của mỗi điểm P là bộ ba số thực (x, y, z) duy nhất thỏa mãn $x + y + z = 1$ và $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Ba số thực này được xác định bởi

$$x = \frac{[PBC]}{[ABC]}, y = \frac{[PCA]}{[ABC]}, z = \frac{[PAB]}{[ABC]},$$

trong đó kí hiệu $[XYZ]$ là diện tích có hướng của tam giác ΔXYZ, tức là, diện tích lấy dấu dương nếu ba đỉnh X, Y, Z theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ và lấy dấu âm trong trường hợp còn lại.

Khái niệm tọa độ diện tích đã được giới thiệu lần đầu tiên bởi nhà toán học người Đức August Ferdinand Möbius vào năm 1827. Sau đó, nhiều nhà toán học khác đã quan tâm nghiên cứu về khái niệm này. Hiện nay, tọa độ diện tích thể hiện rõ tính hữu ích của nó trong việc nghiên cứu hình học phẳng và đặc biệt là các tính chất của tam giác.

Mục đích của Luận văn này là trình bày một cách hệ thống các kiến thức về tọa độ diện tích và một số ứng dụng của tọa độ diện tích trong việc giải các bài toán hình học phẳng.

Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung chính của Luận văn được trình bày thành 2 chương:

• Chương 1: Tọa độ diện tích. Trong chương này, chúng tôi trình bày về khái niệm tọa độ diện tích và một số khái niệm cơ bản của hình học phẳng trong tọa độ diện tích như: phương trình đường thẳng, vị trí tương đối của hai đường thẳng, quan hệ vuông góc, khoảng cách và phương trình đường tròn.

• Chương 2: Một số ứng dụng của phương pháp tọa độ diện tích. Trong chương này, chúng tôi trình bày một số ứng dụng của tọa độ diện tích trong việc giải quyết các bài toán hình học phẳng. Đầu tiên chúng tôi trình bày chứng minh của hai định lý nổi tiếng, Định lý Ceva và Định lý Menelaus, bằng việc sử dụng tọa độ diện tích. Sau đó chúng tôi trình bày ứng dụng tọa độ diện tích trong việc giải một số bài toán chứng minh đồng quy, một số bài toán về diện tích và một số bài toán hình học phẳng trong các đề thi học sinh giỏi. Trước đó, chúng tôi trình bày kí hiệu và công thức Conway.

Chương 1

Tọa độ diện tích

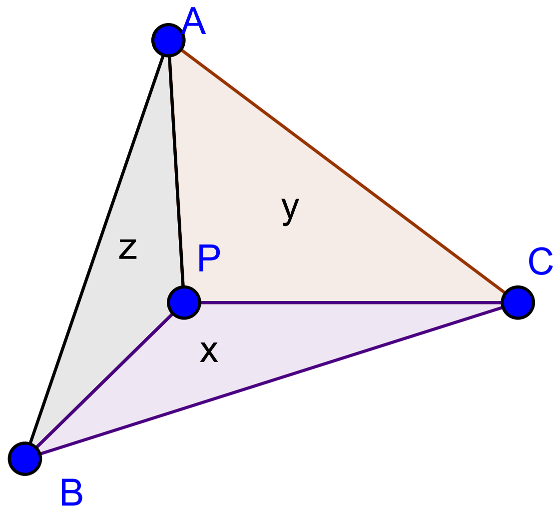
Trong chương mở đầu này, chúng tôi trình bày về khái niệm tọa độ diện tích trong mặt phẳng và một số khái niệm cơ bản của hình học phẳng trong tọa độ diện tích.

1.1 Khái niệm về tọa độ diện tích

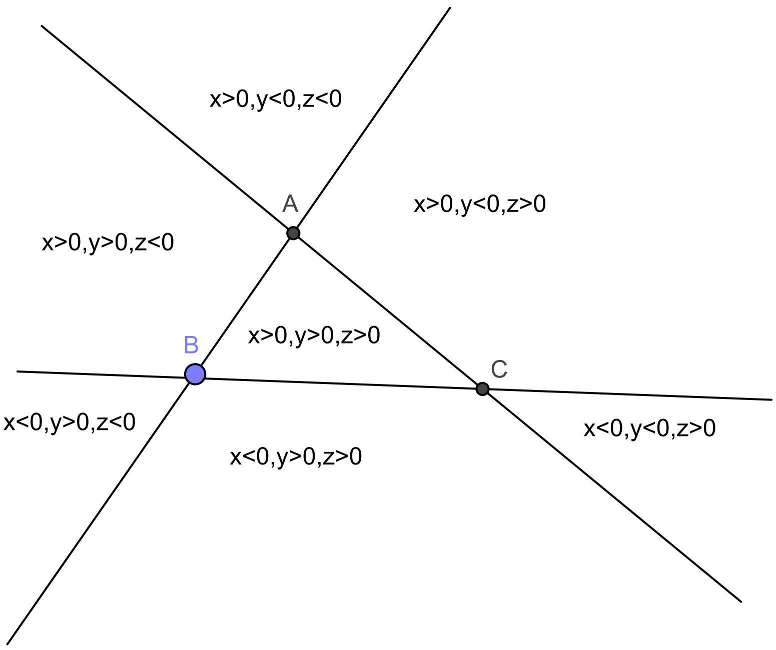
Trong mặt phẳng, để xây dựng *hệ tọa độ diện tích* (tiếng Anh: "areal coordinate system"), ta cần chọn một tam giác ΔABC cố định với thứ tự các đỉnh theo chiều dương, được gọi là *tam giác cơ sở*. Tam giác này đóng vai trò như các trục tọa độ trong hệ tọa độ Descartes. Khi tam giác cơ sở này đã được chọn, mỗi điểm P trong mặt phẳng tương ứng với duy nhất bộ ba số thực có thứ tự (x, y, z) thỏa mãn $x+y+z = 1$. Bộ ba số thực này được gọi là tọa độ diện tích của P và ta viết $P = (x, y, z)$. Cụ thể ta có định nghĩa:

Định nghĩa 1.1. Tọa độ diện tích của điểm P trong mặt phẳng với tam giác cơ sở ΔABC là $\left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PCA]}{[ABC]}, \frac{[PAB]}{[ABC]}\right)$ (xem Hình 1.1).

Theo định nghĩa, ta có $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1)$. Giả sử $P = (x, y, z)$. Khi đó, P nằm trên đường thẳng BC khi và chỉ khi $x = 0$, P nằm trên đường thẳng CA khi và chỉ khi $y = 0$, P nằm trên đường thẳng AB khi và chỉ khi $z = 0$. Hơn nữa, Các đường thẳng AB, BC, CA chia mặt phẳng thành 7 miền xác định bởi dấu của các tọa độ diện tích (xem Hình 1.2). Dựa vào quy ước về dấu của diện tích có hướng của tam giác ta dễ dàng kiểm tra được rằng nếu (x, y, z) là tọa độ diện tích của một điểm trên mặt phẳng thì $x + y + z = 1$.



Hình 1.1: Tọa độ diện tích của điểm $P(x, y, z)$



Hình 1.2: Các miền phẳng xác định bởi dấu của tọa độ diện tích

Như vậy, với Định nghĩa 1.1, mỗi điểm P trong mặt phẳng xác định một tọa độ diện tích. Để chỉ ra định nghĩa này là có nghĩa ta cần chứng minh mỗi bộ ba số thực có thứ tự (x, y, z) thỏa mãn $x + y + z = 1$ là tọa độ diện tích của duy nhất một điểm trong mặt phẳng.

Trước tiên, định lý sau đây cho ta điều kiện cần và đủ để bộ ba số thực (x, y, z) là tọa độ diện tích của điểm P.

Định lý 1.2. *Bộ ba số thực có thứ tự (x, y, z) là tọa độ diện tích của điểm P với tam giác cơ sở ΔABC khi và chỉ khi*

$$x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0} \text{ và } x + y + z = 1.$$

Chứng minh. • *Điều kiện cần*: Giả sử (x, y, z) là tọa độ diện tích của điểm P. Ta cần chứng minh

$$x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

Để chứng minh điều này, ta chỉ cần chứng minh

$$[PBC]\overrightarrow{PA} + [PCA]\overrightarrow{PB} + [PAB]\overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

Ta thấy rằng trong số ba cặp đường thẳng (PA, BC), (PB, CA) và (PC, AB) có ít nhất một cặp đường thẳng không song song với nhau. Không làm mất tính tổng quát ta có thể giả sử $PA \nparallel BC$. Khi đó PA cắt BC tại một điểm A' (xem Hình 1.3). Ta có

$$\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{PC}.$$

Suy ra

$$\overrightarrow{A'C}(\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'B}) = \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{A'B}(\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'C}) = \overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{PC}.$$

Do $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{PC}$ nên

$$\overrightarrow{PA'}(\overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'B}) = \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{PC} \iff \overrightarrow{PA'} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{BC}}.\overrightarrow{PB} - \frac{\overline{A'B}}{\overline{BC}}.\overrightarrow{PC}.$$